CONCOURS D'ADMISSION A L'ESM DE SAINT-CYR EN 1994

MATHÉMATIQUES I

Options M, P, T, TA *Durée : 4 heures*

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ $\quad ||P|| = \text{Sup}\{|P(x)|\,;\ x \in [-1, 1]\}$

U_n : Ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[x]$ de degré n et normalisés (dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1).

DÉFINITION : On appellera polynôme trigonométrique toute application f telle que :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \exists (c_{-N}, c_{-N+1}, \ldots, c_N) \in \mathbb{C}^{2N+1},\ \forall \theta \in \mathbb{R}$$

$$f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{ik\theta}$$

Lorsque f n'est pas le polynôme trigonométrique nul on supposera : $(c_{-N}, c_N) \neq (0, 0)$.

OBJECTIFS :

Le problème comporte deux parties.

Dans la première on caractérise les polynômes trigonométriques à valeurs réelles positives.

Dans la seconde on détermine $\text{Inf}\{||P||\,;\ P \in U_n\}$ et l'unique polynôme réalisant cet Inf .

PARTIE 1

Soit f un polynôme trigonométrique : $f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{ik\theta}$

1) Calculer pour $m \in \mathbb{Z}$ les intégrales : $\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta}\, d\theta \quad ; \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-im\theta}\, d\theta$

2) En déduire l'unicité de l'écriture d'un polynôme trigonométrique non nul

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit à valeurs réelles ($\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) \in \mathbb{R}$) est : $\forall k \in [\![0, N]\!]$, $c_{-k} = \overline{c_k}$.

3) Montrer qu'il existe un unique P , polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = e^{-iN\theta} P(e^{i\theta})$.

Calculer les coefficients, u_0 , u_1 , u_2 , ... de P en fonction des c_k .

Quel est le degré de P lorsque $c_N \neq 0$.

On suppose pour la suite f à valeurs réelles, non nul.

4) Montrer $P(0) \neq 0$ et vérifier que $\forall k \in [\![0, 2N]\!]$ $u_{2N-k} = \overline{u}_k$.

En déduire que : Si Z_0 est racine de P de multiplicité m
alors $1/\overline{Z}_0$ est aussi racine de multiplicité m.

(on exprimera $P(1/\overline{Z})$ en fonction de $P(Z)$).

5) Soit θ_0 tel que $e^{i\theta_0}$ est une racine de P de multiplicité m.

a) Montrer :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\theta) = (\sin\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right))^m g(\theta)$$

où g est une fonction continue telle que : $g(\theta_0) \neq 0$.

b) Montrer que si f est de plus à valeurs réelles positives, alors m est pair.

On suppose désormais f à valeurs réelles positives.

6. *a*) Montrer que l'on peut factoriser P sous la forme :

$$P(X) = c\, A(X)\, B(X)$$

où : c est une constante complexe non nulle ;

A est un polynôme égal à 1 ou du type : $A(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - e^{i\theta_k})^{2\alpha_k}$,

les θ_k étant des réels distincts modulo 2π,

les α_k des entiers naturels ;

B est un polynôme égal à 1 ou du type : $B(X) = \prod_{k=1}^{q} [(X - Z_k)(X - \frac{1}{\overline{Z}_k})]^{\beta_k}$,

les Z_k étant des complexes distincts de modules < 1,

les β_k des entiers naturels.

Que vaut la somme totale des entiers α_k et β_k ?

b) En déduire qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ de degré $\leq N$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = |Q(e^{i\theta})|^2$

On pourra remarquer : $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$(e^{i\theta} - z_k)(e^{i\theta} - \frac{1}{\overline{z}_k}) = -\frac{e^{i\theta}}{\overline{z}_k}|e^{i\theta} - z_k|^2$$

$$(e^{i\theta} - e^{i\theta_k})^2 = -e^{i\theta} e^{i\theta_k} |e^{i\theta} - e^{i\theta_k}|^2.$$

PARTIE 2

Soit la famille de polynômes (T_n) pour $n \in \mathbb{N}$ définie par :

$$T_0 = 1 \qquad T_1 = X \qquad T_{n+1} = 2X.T_n - T_{n-1}$$

1) Montrer que quel que soit n appartenant à $\mathbf{N}$, T_n est un polynôme de degré n, et préciser son terme de plus haut degré.
Montrer l'égalité :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n\left(\cos(\theta)\right) = \cos(n\,\theta)$$

Calculer : $\left|\left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n \right|\right|$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit pour k entier tel que : $0 \leq k \leq n$ les réels $x_k = \cos(k\,\pi/n)$.
On remarquera : $-1 = x_n < x_{n-1} < \ldots < x_0 = 1$.

a) Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré n normalisé tel que : $||P|| < 1/2^{n-1}$.

Montrer que le polynôme : $Q = \frac{1}{2^{n-1}} . T_n - P$

s'annule sur chaque intervalle $]x_{i+1}, x_i[$ $(0 \leq i \leq n-1)$. En déduire une contradiction.

b) Montrer que si $P \in U_n$ (voir notations) alors $||P|| \geq (1/2^{n-1})$. (On distinguera P réel, P complexe en séparant dans ce cas partie réelle et imaginaire de P).

c) Montrer que $\text{Inf}\{ ||P||;\ P \in U_n \} = 1/2^{n-1}$.

3) Soit : $f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{ik\theta}$ un polynôme trigonométrique à valeurs réelles positives.

a) Montrer qu'il existe un unique $(2N+1)$-uplet $(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_N, b_N)$ de $\mathbb{R}^{2N+1}$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos(k\,\theta) + b_k \sin(k\,\theta)\right)$$

b) D'après I 6 *b*) il existe un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) = \left|Q(e^{i\theta})\right|^2$.

Soit : $Q(X) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k X^k$ un tel polynôme :

Montrer : $a_N - ib_N = 2\,\overline{\alpha}_0\,\alpha_N$ et $a_0 = \sum_{k=0}^{N} |\alpha_k|^2$.

En déduire $a_N^2 + b_N^2 \leq a_0^2$.

4) Etude d'un cas particulier.

Soit Q un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $N \in \mathbb{N}^*$

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k X^k \quad , \text{avec} \quad \underline{\alpha_0 = \alpha_N = 1}$$

$$f(\theta) = |Q(e^{i\theta})|^2 = a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$$

On pose :

$$M(Q) = \sup \{ |Q(e^{i\theta})| ; \theta \in \mathbb{R} \}$$

a) Que deviennent les relations trouvées en II 3 *b*) ?

b) Montrer en utilisant une intégration : $[M(Q)]^2 \geq a_0$.

c) En réutilisant II 3 *b*) pour la fonction g telle que :

$$g(\theta) = [M(Q)]^2 - f(\theta)$$

montrer que : $[M(Q)] \geq 2$

avec égalité si et seulement si : $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{N-1} = 0$.

5) Soit $A \in U_n$ tel que : $n \in \mathbb{N}^* . ||A|| = (1/2^{n-1})$.

On considère le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = 2^n X^n . A\left(\frac{1}{2}(X + \frac{1}{X})\right)$$

a) Quels sont le degré de Q, son terme constant et son terme de plus haut degré ?

b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que : $2\cos(\theta) = z + 1/z$.

Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad 2\cos(m\theta) = z^m + 1/z^m$$

c) Calculer M(Q).

En déduire que :

$$Q(X) = X^{2n} + 1$$

d) Montrer :

$$A = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$$

Conclusion ?